

Teoría para el Bloque 3 de la Hoja 1

Funciones: dominio, tipología, transformaciones e inversas (Ejercicios 7 a 17)

0. Qué cubre este bloque

Este es el bloque más largo de la Hoja 1 (ejercicios 7 a 17) y trabaja todos los conceptos fundamentales sobre funciones vistos en el Tema 1: dominio e imagen, operaciones con funciones (incluida la composición), monotonía, biyectividad e inversas, paridad, transformaciones gráficas y periodicidad.

1. Conceptos fundamentales

- Función $f: A \rightarrow B$: asigna a cada $x \in A$ exactamente un elemento $f(x) \in B$.
- Dominio $D(f)$: conjunto de x para los que existe $f(x)$.
- Imagen $Im(f)$: conjunto de todos los valores $f(x)$ que realmente se alcanzan ($Im(f) \subseteq B$).
- Inyectiva: elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.
- Sobreyectiva: todo elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento del dominio.
- Biyectiva: inyectiva y sobreyectiva a la vez $\Rightarrow$ existe una correspondencia uno a uno entre dominio e imagen.

Para hallar dominio de una expresión con raíces, logaritmos o fracciones: en una raíz de índice par el radicando debe ser ≥ 0 ; en un logaritmo, el argumento debe ser > 0 ; en una fracción, el denominador debe ser $\neq 0$. Cuando se componen varias funciones, el dominio final es la intersección de todas las condiciones.

2. Operaciones con funciones

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Producto por escalar: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$
- Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$
- Composición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Es necesario que el recorrido de f corte con el dominio de g .

Ojo con el orden: $(g \circ f)(x)$ significa "primero f , luego g ": se aplica f a x , y al resultado se le aplica g . El dominio de $g \circ f$ son los x del dominio de f tales que $f(x)$ esté además en el dominio de g .

3. Monotonía y composición de funciones monótonas

- Creciente en I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Estrictamente creciente: la desigualdad es estricta.
- Decreciente en I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Estrictamente decreciente: desigualdad estricta.

Resultado clave sobre composición

Si f y g son ambas crecientes o ambas decrecientes, la composición (en cualquier orden) es creciente. Si una es creciente y la otra decreciente, la composición es decreciente.

Piensa en "signos": creciente = +, decreciente = -. Componer dos funciones de igual "signo" da +; de distinto signo da -, igual que multiplicar signos.

4. Biyectividad y función inversa

Muchas funciones elementales (x^2 , $\sen x$, e^x ...) no son inyectivas en todo su dominio natural, pero si se restringen a un intervalo donde son estrictamente monótonas, sí lo son, y entonces se puede definir su inversa en ese intervalo restringido.

Teoremas sobre la función inversa

- f tiene inversa $\Leftrightarrow f$ es inyectiva en su dominio.
- Si f es continua en I , f es inyectiva $\Leftrightarrow f$ es monótona (creciente o decreciente) en I .
- Si f tiene inversa: f es creciente $\Leftrightarrow f^{-1}$ es creciente; f es decreciente $\Leftrightarrow f^{-1}$ es decreciente.
- Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Cómo calcular una función inversa

- 1) Escribe $y = f(x)$.
- 2) Despeja x en función de y (deshaciendo las operaciones en orden inverso al que se aplicaron).
- 3) Intercambia los nombres: el resultado $x(y)$ es $f^{-1}(x)$ cambiando y por x .

Para una función definida a trozos, invierte cada trozo por separado y calcula el rango (la imagen) de cada trozo: ese rango será el dominio del trozo correspondiente de la función inversa.

5. Paridad: funciones pares e impares

- Función par: $f(-x) = f(x)$ para todo x del dominio (gráfica simétrica respecto al eje Y).

- Función impar: $f(-x) = -f(x)$ para todo x del dominio (gráfica simétrica respecto al origen).

Condición previa imprescindible: el dominio debe ser simétrico respecto a 0 (si x está en el dominio, $-x$ también debe estarlo). Si no lo es, la función no puede ser ni par ni impar, sin necesidad de comprobar nada más.

Reglas de combinación (par = P, impar = I)

- $P \times P = P$; $I \times I = P$; $P \times I = I$ (igual que el producto de signos: incluye también composición en algunos casos)
- $|impar|$ es par.
- Si f es par: $f \circ g$ es par para cualquier g , y $g \circ f$ es par para cualquier g .
- Una potencia entera g^k de una función impar g es par si k es par, e impar si k es impar.

6. Periodicidad

- f es periódica de periodo p si $f(x+p) = f(x)$ para todo x del dominio.
- Si f tiene periodo p , entonces $g(x) = f(c \cdot x)$ tiene periodo $p / |c|$ ($c \neq 0$).
- Un desplazamiento vertical u horizontal (sumar una constante dentro o fuera) no cambia el periodo.

Resultado clave para el ejercicio 17

- Si g es periódica (periodo p) y f es una función cualquiera, entonces $f \circ g$ SIEMPRE es periódica con el mismo periodo p : $(f \circ g)(x+p) = f(g(x+p)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, sin importar qué es f .
- En cambio, $g \circ f$ (aplicar primero la función cualquiera y luego la periódica) NO tiene por qué ser periódica: depende de f .

Aplicación práctica: si ves una expresión $F(\tan(3x))$, $F(\sin(2x))$, etc. —una función cualquiera aplicada sobre una función periódica—, ya sabes que el resultado es periódico sin necesidad de más cálculo, con periodo igual (o divisor) al de la función interior.

7. Transformaciones gráficas (base del ejercicio 9)

A partir de la gráfica de $y = f(x)$, estas son las transformaciones básicas:

- $g(x) = f(x - c)$, $c > 0$: traslación horizontal c unidades hacia la DERECHA.
- $g(x) = f(x + c)$, $c > 0$: traslación horizontal c unidades hacia la IZQUIERDA.
- $g(x) = f(x) + c$, $c > 0$: traslación vertical c unidades hacia ARRIBA.

- $g(x) = f(x) - c$, $c > 0$: traslación vertical c unidades hacia ABAJO.
- $g(x) = -f(x)$: reflexión respecto al eje horizontal (se invierte el signo de las imágenes).
- $g(x) = f(-x)$: reflexión respecto al eje vertical (se invierte el signo de la variable).
- $g(x) = f(k \cdot x)$, $k > 1$: compresión horizontal (la gráfica se "encoge" hacia el eje Y).
- $g(x) = k \cdot f(x)$, $k > 1$: estiramiento vertical (la gráfica se "estira" alejándose del eje X).
- $g(x) = |f(x)|$: la parte de la gráfica que estaba por debajo del eje X se refleja hacia arriba; lo que ya estaba por encima no cambia.
- $g(x) = f(|x|)$: se borra la parte de la gráfica con $x < 0$, y se sustituye por el reflejo (respecto al eje Y) de la parte con $x \geq 0$. El resultado es siempre una función PAR.

8. Guía por apartados

Ejercicios 7 y 8 — Dominio, imagen y composición

- Ejercicio 7: con $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2 - 1$, calcula primero dominio e imagen de cada una por separado; luego evalúa numéricamente $f(g(2))$ y $g(f(2))$ sustituyendo de dentro hacia fuera; y por último construye las expresiones generales $f(g(x))$ y $g(f(x))$, sin olvidar el dominio de la composición.
- Ejercicio 8: para cada función con logaritmo, primero impón que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo para hallar el dominio; después, sabiendo el rango de valores que toma ese argumento dentro del dominio (usa que $\sin$ y $\cos$ están acotados entre -1 y 1 , o completa cuadrados para una expresión cuadrática), aplica que $\ln$ es creciente para deducir la imagen.

Ejercicio 9 — Transformaciones gráficas

Para cada función base (x^2 , e^x , $\ln x$, $\sin x$) aplica las seis transformaciones del apartado 7 de esta guía, una por una, partiendo siempre de la gráfica original de la función base.

Ejercicios 10 y 11 — Monotonía y composición

- Ejercicio 10: para cada afirmación, intenta primero demostrarla con la definición de función creciente; si sospechas que es falsa, busca un contraejemplo sencillo (funciones lineales del tipo $f(x) = x$ suelen bastar).
- Ejercicio 11: aplica directamente el resultado clave de composición del apartado 3 de esta guía a los cuatro casos posibles (creciente-creciente, creciente-decreciente, decreciente-creciente, decreciente-decreciente).

Ejercicios 12 y 13 — Biyectividad e inversas

- Ejercicio 12: identifica primero en qué tramo la función es estrictamente monótona (usa las gráficas de las funciones elementales); ese tramo es el intervalo I , y su imagen correspondiente es J .
- Ejercicio 13: sigue el método de despejar x en función de y del apartado 4 de esta guía. Para la función a trozos $j(x)$, invierte cada trozo por separado y calcula el rango de cada uno para saber en qué tramo de la inversa se usa cada fórmula.

Ejercicios 14 y 15 — Paridad

- Ejercicio 14: comprueba primero que el dominio es simétrico; luego calcula $f(-x)$ y compáralo con $f(x)$ (par) o con $-f(x)$ (impar). Si no coincide con ninguno, o si el dominio no es simétrico, la función no es ni par ni impar.
- Ejercicio 15: cada apartado es una demostración corta: sustituye $-x$, usa que f es par ($f(-x)=f(x)$) y que g es impar ($g(-x)=-g(x)$), y simplifica hasta llegar a la definición de par o impar según corresponda.

Ejercicios 16 y 17 — Periodicidad

- Ejercicio 16: identifica el periodo de la función trigonométrica base (2π para $\sin$ y $\cos$, π para $\tan$) y aplica la fórmula $p/|c|$ según el coeficiente que multiplica a x dentro de la función.
- Ejercicio 17: usa el resultado clave del apartado 6 de esta guía. Para la función $f(x)$ con $\tan(3x)$ dentro, identifica la parte interior periódica ($\tan(3x)$, de periodo $\pi/3$) y trata todo lo demás como una función cualquiera F aplicada sobre ella: $F \circ (\tan(3x))$ es periódica de periodo $\pi/3$ sin necesidad de más cálculo.

9. Antes de empezar los ejercicios, comprueba que sabes...

- Calcular dominio e imagen de una función, incluyendo composiciones.
- Aplicar las seis transformaciones gráficas básicas a una curva conocida.
- Reconocer si la composición de dos funciones monótonas es creciente o decreciente.
- Restringir una función no inyectiva a un intervalo donde sí lo sea, para poder calcular su inversa.
- Despejar x en función de y para hallar una función inversa, incluyendo funciones a trozos.
- Comprobar la simetría del dominio antes de estudiar la paridad de una función.
- Usar la fórmula del periodo $p/|c|$ y el resultado sobre $f \circ g$ cuando g es periódica.