

Teoría para el Bloque 2 de la Hoja 1

Relaciones de orden y orden de Pareto (Ejercicios 5 y 6)

0. Qué cubre este bloque

Este bloque reúne los ejercicios 5 y 6 de la Hoja 1, centrados en las relaciones de orden: cómo se define una relación de orden, la diferencia entre orden total y parcial, y los conceptos de máximo, mínimo, maximales y minimales en un conjunto ordenado. El ejercicio 5 trabaja el orden habitual de $\mathbb{R}$; el ejercicio 6 introduce el orden de Pareto en el plano $\mathbb{R}^2$.

1. Relaciones binarias y relaciones de orden

Una relación binaria en un conjunto A es un criterio que relaciona pares de elementos de A . Si a está relacionado con b se escribe $a \mathfrak{R} b$.

Propiedades que puede tener una relación binaria $\mathfrak{R}$ en A

- Reflexiva: $\forall a \in A, a \mathfrak{R} a$
- Simétrica: $\forall a, b \in A, a \mathfrak{R} b \Rightarrow b \mathfrak{R} a$
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A, (a \mathfrak{R} b \text{ y } b \mathfrak{R} a) \Rightarrow a = b$
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A, (a \mathfrak{R} b \text{ y } b \mathfrak{R} c) \Rightarrow a \mathfrak{R} c$

Relación de orden

Una relación binaria es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto ordenado es aquel en el que se ha definido una relación de orden.

- Orden total: $\mathfrak{R}$ es de orden total en A si $\forall a, b \in A$ se tiene $a \mathfrak{R} b$ o bien $b \mathfrak{R} a$ (siempre se pueden comparar dos elementos cualesquiera).
- Orden parcial: $\mathfrak{R}$ es de orden parcial en A si existen $a, b \in A$ que no se pueden relacionar ni como $a \mathfrak{R} b$ ni como $b \mathfrak{R} a$.

El orden habitual $\leq$ en $\mathbb{R}$ es total: dos números reales siempre se pueden comparar. El orden de Pareto en $\mathbb{R}^2$ (ejercicio 6) es parcial: hay pares de puntos que no se pueden comparar entre sí.

2. Máximo, mínimo, maximales y minimales

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $S \subseteq A$ ($\leq$ puede ser de orden total o parcial).

Máximo y mínimo

- Máximo de S : $\text{Max}(S) = a \Leftrightarrow a \in S \text{ y } \forall x \in S: x \leq a$. No siempre existe. Si existe, es único.
- Mínimo de S : $\text{Min}(S) = a \Leftrightarrow a \in S \text{ y } \forall x \in S: a \leq x$. No siempre existe. Si existe, es único.

Maximales y minimales

- $\text{Maximal}(S) = \{a \in S : \nexists x \in S, a \leq x \text{ y } a \neq x\}$ — ningún otro elemento de S es "mayor" que a .
- $\text{Minimal}(S) = \{a \in S : \nexists x \in S, x \leq a \text{ y } a \neq x\}$ — ningún otro elemento de S es "menor" que a .

En un conjunto **TOTALMENTE** ordenado (como $(\mathbb{R}, \leq)$), máximo y maximal son conceptos equivalentes: si existe el máximo, es el único maximal, y viceversa. En un conjunto **PARCIALMENTE** ordenado (como $(\mathbb{R}^2, \leq_P)$) esto deja de ser cierto: puede haber varios maximales sin que exista máximo, porque dos maximales distintos pueden no ser comparables entre sí.

3. El orden habitual en $\mathbb{R}$ (base del ejercicio 5)

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Para un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido como unión de intervalos:

- Si el intervalo mayor no está acotado superiormente, A no tiene máximo.
- Si está acotado superiormente y abierto en el extremo superior, ese extremo no pertenece a $A \Rightarrow A$ no tiene máximo.
- Si está acotado superiormente y cerrado en el extremo superior, ese extremo sí pertenece a $A \Rightarrow$ es el máximo de A .
- De forma simétrica para el mínimo, mirando el extremo inferior.

Aplicado a conjuntos definidos por igualdades (como en el ejercicio 5, $A = \{x : \sin x = \alpha\}$), conviene primero describir explícitamente el conjunto de soluciones antes de buscar máximo o mínimo: si es un conjunto discreto no acotado (infinitos puntos aislados que se extienden sin límite), no tiene ni máximo ni mínimo.

4. El orden de Pareto en el plano (base del ejercicio 6)

En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define: $(a, b) \leq_P (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d$.

Es una relación de orden parcial: es reflexiva, antisimétrica y transitiva (se demuestra igual que en $\mathbb{R}$, aplicando las propiedades componente a componente), pero no total, porque dos puntos como $(1, 5)$ y $(3, 2)$ no se pueden comparar: ni $(1, 5) \leq_P (3, 2)$ [porque $5 > 2$] ni $(3, 2) \leq_P (1, 5)$ [porque $3 > 1$].

Cómo encontrar máximo/mínimo/maximales/minimales de una región del plano

- Máximo: busca el punto (m_1, m_2) tal que m_1 sea el mayor valor de x en la región Y m_2 sea el mayor valor de y en la región, Y ADEMÁS ese punto (m_1, m_2) pertenezca a la región. Si el "punto ideal" no pertenece a la región, no hay máximo.
- Maximales: son los puntos de la frontera "superior-derecha" de la región: aquellos que no tienen ningún otro punto de la región con x mayor o igual Y y mayor o igual simultáneamente.
- Mínimo y minimales: razonamiento simétrico, mirando la frontera "inferior-izquierda".

Truco práctico: para saber si un tramo de la frontera es maximal, comprueba si al moverte a lo largo de esa curva, x e y se mueven en el MISMO sentido (los dos crecen o los dos decrecen) o en sentido CONTRARIO. Si se mueven en sentido contrario (uno crece mientras el otro decrece), esos puntos son incomparables entre sí y todos ellos pueden ser maximales o minimales a la vez. Si se mueven en el mismo sentido, solo el extremo más favorable es maximal/minimal; el resto queda dominado.

5. Ejemplos resueltos en el Tema 1 (mismo tipo que el ejercicio 6)

Estos tres ejemplos, vistos en teoría, tienen el mismo planteamiento que los conjuntos A, B y C del ejercicio 6 y sirven de modelo directo:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$$

- Máximo: no existe (la región no está acotada por arriba-derecha).
- Maximales: toda la recta frontera $y = 1 - x$ (al movernos por ella, si x crece, y decrece: son incomparables entre sí, luego todos maximales).
- Mínimo y minimales: no existen (la región tampoco está acotada por abajo-izquierda).

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \text{ (el cuadrado } [-1,1] \times [-1,1])$$

- Máximo = Maximal = $\{(1, 1)\}$ (la esquina superior derecha domina a todo el cuadrado).
- Mínimo = Minimal = $\{(-1, -1)\}$ (la esquina inferior izquierda).

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\} \text{ (región bajo la parábola, sobre el eje } x)$$

- Máximo: no existe.
- Maximales: el tramo de parábola $y = 4 - x^2$ con $0 \leq x \leq 2$ (mitad derecha: allí x crece y la curva decrece, son incomparables $\rightarrow$ todos maximales).
- Mínimo = Minimal = $\{(-2, 0)\}$ (el punto más a la izquierda y más abajo de la región coincide en un único punto).

Fíjate en el patrón: cuando la frontera es una curva $y = f(x)$, el tramo donde f es DECRECIENTE (según recorres x de izquierda a derecha) da lugar a los maximales de la derecha; el tramo donde f es CRECIENTE (más a la izquierda) suele quedar dominado y no aporta maximales. Para los minimales ocurre lo simétrico.

6. Guía por apartados

Ejercicio 5 — Máximo y mínimo en $(\mathbb{R}, \leq)$

Para cada función (seno, coseno, exponencial, logaritmo) y cada valor de α ($-1, 0, 1$):

- a) y b) $A = \{x : \sin x = \alpha\}$ y $A = \{x : \cos x = \alpha\}$: las soluciones de estas ecuaciones son siempre conjuntos discretos de infinitos puntos que se repiten cada 2π hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$. Al no estar acotados ni por arriba ni por abajo, nunca tienen máximo ni mínimo, para ningún valor de $\alpha \in [-1, 1]$.
- c) y d) $A = \{x : e^x \leq \alpha\}$ y $A = \{x : e^x \geq \alpha\}$: recuerda que $e^x > 0$ siempre. Si $\alpha \leq 0$, el primer conjunto es vacío ($\emptyset$) y el segundo es todo $\mathbb{R}$ (ninguno de los dos tiene máximo ni mínimo). Si $\alpha > 0$, usa que e^x es creciente para despejar $x \leq \ln \alpha$ o $x \geq \ln \alpha$, obteniendo un intervalo semiabierto que sí tiene máximo (caso $\leq$) o mínimo (caso $\geq$).
- e) y f) $A = \{x : \ln x \leq \alpha\}$ y $A = \{x : \ln x \geq \alpha\}$: recuerda que el dominio de $\ln x$ es $x > 0$. Usa que $\ln$ es creciente para despejar $x \leq e^\alpha$ o $x \geq e^\alpha$, y no olvides intersectar con $x > 0$. El caso $\leq$ da un intervalo $(0, e^\alpha]$ con máximo e^α pero sin mínimo (el 0 no pertenece); el caso $\geq$ da un intervalo $[e^\alpha, +\infty)$ con mínimo e^α pero sin máximo.

Ejercicio 6 — Orden de Pareto en el plano

- Primero: demuestra que $\leq_P$ es de orden parcial comprobando reflexiva, antisimétrica y transitiva (la demostración es idéntica en estructura a la del orden $\leq$ en $\mathbb{R}$, pero aplicada a las dos componentes a la vez; usa el modelo del apartado 4 de esta guía).
- Conjunto $A = \{(x, y) : x + y \leq 1\}$: mismo planteamiento que el primer ejemplo del apartado 5 de esta guía.
- Conjunto $B = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$: mismo planteamiento que el segundo ejemplo (el cuadrado).
- Conjunto $C = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$: mismo planteamiento que el tercer ejemplo (región bajo la parábola).
- Conjunto $D = \{(x, y) : x^2 - 9 \leq y \leq 0\}$: primero halla el dominio en x imponiendo $x^2 - 9 \leq 0$. La región queda acotada por la parábola $y = x^2 - 9$ por debajo y la recta $y = 0$ por arriba; analiza por separado la mitad derecha e izquierda de la parábola frontera (en una mitad la curva crece con x , en la otra decrece) para encontrar maximales y minimales, y comprueba si el «punto ideal» (mayor x , mayor y posibles a la vez) realmente pertenece a la región.

- Conjunto $E = \{(x,y) : |x| \leq y \leq 6-x^2\}$; la región está entre la V de $y=|x|$ (abajo) y la parábola $y=6-x^2$ (arriba); ambas curvas se cortan en dos puntos que delimitan el dominio en x . Como en el caso D, estudia cada rama de cada curva por separado según sea creciente o decreciente.

Para D y E, antes de listar maximales/minimales, comprueba siempre si el máximo o el mínimo existen: calcula el «punto candidato» combinando el mayor (o menor) valor posible de x con el mayor (o menor) valor posible de y , y verifica si ese punto concreto pertenece realmente al conjunto. Si no pertenece, no hay máximo/mínimo, pero puede seguir habiendo varios maximales/minimales.

7. Antes de empezar los ejercicios, comprueba que sabes...

- Distinguir cuándo una relación es de orden total y cuándo de orden parcial, y dar un ejemplo de par no comparable en el caso parcial.
- Aplicar correctamente las definiciones de máximo/mínimo (un único candidato que domina a todos) frente a maximales/minimales (puede haber varios, ninguno dominado).
- Reconocer que en R (orden total) máximo y maximal coinciden, pero en R^2 con el orden de Pareto (orden parcial) pueden no coincidir.
- Analizar una frontera curva por tramos según sea creciente o decreciente para localizar los maximales/minimales.
- Comprobar siempre si el «punto ideal» (combinación de los mejores valores de cada coordenada) pertenece realmente al conjunto antes de afirmar que hay máximo o mínimo.