

Teoría para el Bloque 1 de la Hoja 1

Desigualdades, intervalos y valor absoluto (Ejercicios 1 a 4)

0. Qué cubre este bloque

Este bloque reúne los ejercicios 1 a 4 de la Hoja 1, todos centrados en el mismo bloque teórico del Tema 1: el orden en la recta real, los intervalos y el valor absoluto. Dominar las propiedades de esta sección es la base para poder resolver inecuaciones, interpretarlas gráficamente y discutir la verdad o falsedad de afirmaciones con desigualdades.

1. El orden en la recta real

Dados dos números reales x e y , se define la relación $x < y$ (orden estricto) cuando $x - y < 0$, y la relación $x \leq y$ (orden no estricto) cuando $x - y \leq 0$. La relación " $\leq$ " es una relación de orden en $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto ordenado y, además, totalmente ordenado (para cualquier par de números siempre se puede decir cuál es menor).

Propiedades de las desigualdades

Válidas tanto para desigualdades estrictas como no estrictas:

- $a < b \Leftrightarrow a + K < b + K$
- Si $K > 0$: $a < b \Leftrightarrow aK < bK$. Si $K < 0$: $a < b \Leftrightarrow aK > bK$ (al multiplicar por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido)
- $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$
- $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$; $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
- Si n es par: $x^n > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Si n es impar: $x^n > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $a < b \Leftrightarrow b > a$
- $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- $0 < a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b$
- Si ambos miembros son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, se conserva el sentido:
 $0 < n, 0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n$

- Con exponentes fraccionarios: $0 < n$, $0 < a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Ojo con el error más frecuente: al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte. Es la causa más habitual de fallos en los ejercicios 1.a–1.h.

2. Intervalos

Un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si tiene más de un elemento y, dados dos puntos cualesquiera de I , todo punto intermedio también pertenece a I (no hay "huecos").

Clasificación

- Cerrado: los extremos (la frontera) pertenecen al intervalo — se usan corchetes $[a, b]$.
- Abierto: ningún punto de la frontera pertenece al intervalo — se usan paréntesis (a, b) .
- Acotado: existe una cota superior y/o inferior (un número real que ningún elemento del intervalo supera o del que ningún elemento es menor).
- No acotado: no existe cota superior y/o inferior; aparecen $+\infty$ o $-\infty$, que siempre se escriben con paréntesis, nunca con corchetes.

Al resolver una inecuación, la solución final casi siempre se expresa como unión e intersección de intervalos: recuerda que " $\vee$ " (o) corresponde a unión ($\cup$) y " $\wedge$ " (y) corresponde a intersección ($\cap$).

3. El valor absoluto

Definición

Dado $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a , $|a|$, se define como:

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0 \quad |a| = -a \text{ si } a \leq 0$$

Definiciones equivalentes, útiles según el ejercicio:

- $|a| = \max(a, -a)$
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- Interpretación geométrica: $|a|$ es la distancia entre el número a y el origen (el 0) en la recta real. Más en general, $|a - b|$ es la distancia entre a y b .

Propiedades del valor absoluto ($a, b \in \mathbb{R}$)

1. $|a| \geq 0$, y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $-|a| \leq a \leq |a|$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$

- 4. $|a|^2 = a^2$ (muy útil: permite quitar valores absolutos elevando al cuadrado)
- 5. Si $a^2 \leq b^2$, entonces $|a| \leq |b|$
- 6. Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Consecuencia directa (cambiando b por $-b$): $|a - b| \geq |a| - |b|$ y $|a - b| \geq ||a| - |b||$
- 7. Sea $p > 0$. Entonces:
- $|a| \leq p \Leftrightarrow -p \leq a \leq p$
- $|a| \geq p \Leftrightarrow a \geq p \vee a \leq -p$
- Ambas se cumplen igual cambiando $\leq$ por $<$ y $\geq$ por $>$.

La propiedad 7 es la que más se usa en la práctica: convierte una inecuación con valor absoluto en una (o dos) inecuaciones sin él. Con " $\leq$ " el resultado es UNA condición doble (intersección); con " $\geq$ " son DOS condiciones separadas por "o" (unión).

4. Cómo resolver inecuaciones con valor absoluto: método y ejemplo

Pasos generales:

- 1) Aislar la expresión con valor absoluto en un lado de la desigualdad.
- 2) Aplicar la propiedad 7 (o la definición por casos si hay varios valores absolutos, o varias incógnitas dentro y fuera del valor absoluto, como en 1.b, 1.f o 1.h).
- 3) Resolver cada inecuación resultante por separado.
- 4) Combinar las soluciones con unión o intersección según corresponda, y expresar el resultado como intervalo(s).

Ejemplo resuelto: $5 < |2x - 1| \leq 9$

Es la concatenación de dos desigualdades que hay que resolver por separado y luego intersecar:

$$5 < |2x - 1| \Rightarrow |2x - 1| > 5 \Rightarrow 2x - 1 > 5 \vee 2x - 1 < -5 \Rightarrow x > 3 \vee x < -2$$

$$\Rightarrow (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

$$|2x - 1| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq 2x - 1 \leq 9 \Rightarrow -4 \leq x \leq 5 \Rightarrow [-4, 5]$$

$$\text{Solución final: } ((-\infty, -2) \cup (3, +\infty)) \cap [-4, 5] = [-4, -2) \cup (3, 5]$$

5. Guía por apartados para los ejercicios 1 a 4

Ejercicio 1 — Resolver desigualdades con valor absoluto

- a) $|9 - 2x| \leq 1$ — aplica directamente la propiedad 7 (caso " $\leq$ ").
- b) $-5|x + 3| \leq 4x - 5$ — aísla el valor absoluto antes de aplicar la propiedad 7; cuidado al despejar, puede cambiar el sentido.
- c) $|x|/3 + 2 \leq |x|$ — reagrupa los términos con $|x|$ en un lado; queda una desigualdad en $|x|$ directa.
- d) $1 \leq |3 - 2x|$ — propiedad 7, caso " $\geq$ " (da lugar a unión de dos soluciones).
- e) $(x^2 - 16)(x - 1) / (x - 3) \geq 0$ — no lleva valor absoluto: se resuelve por el método de los signos (factorizar, hallar puntos de corte y estudiar el signo en cada intervalo, excluyendo $x = 3$ del dominio).
- f) $|x - 3| + |x + 3| \leq 10$ — dos valores absolutos con puntos de "quiebre" distintos ($x = 3$ y $x = -3$): se resuelve por casos, dividiendo $\mathbb{R}$ en tres tramos.
- g) $|x - 3| + |x + 3| \leq k$, $k \in \mathbb{R}$ — igual que f) pero en función del parámetro k ; discute según el valor de k (por ejemplo, $k \geq 6$, o $k < 6$).
- h) $|(x - 1)/x| - 1 \geq 0$ — aísla el valor absoluto (queda $|(x - 1)/x| \geq 1$) y aplica la propiedad 7, sin olvidar excluir $x = 0$ del dominio.

Ejercicio 2 — Interpretación geométrica

Para cada apartado de a) a d), dibuja las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ indicadas y identifica gráficamente en qué tramos de x la gráfica de una está por debajo (o por encima) de la otra; ese conjunto de x es la solución de la desigualdad. Es la misma solución que se obtiene algebraicamente en el ejercicio 1, pero vista como comparación de gráficas.

Ejercicio 3 — Discutir desigualdades con valor absoluto

Usa las propiedades 2 ($-|a| \leq a \leq |a|$), 6 (desigualdad triangular $|a+b| \leq |a|+|b|$) y sus consecuencias ($|a-b| \geq |a|-|b|$, $||a|-|b|| \leq |a-b|$). Para cada afirmación, decide si es siempre cierta (demuéstrala a partir de las propiedades) o busca un contraejemplo numérico sencillo si es falsa.

Ejercicio 4 — Verdad o falsedad con cuadrados y valores absolutos

Apóyate en la propiedad 4 ($|a|^2 = a^2$) y en la propiedad 5 ($a^2 \leq b^2 \Rightarrow |a| \leq |b|$), y ten en cuenta que $a^2 \leq b^2$ no equivale en general a $a \leq b$ (el signo de a y b importa). Busca contraejemplos con números negativos cuando sospeches que una implicación es falsa.

6. Antes de empezar los ejercicios, comprueba que sabes...

- Aplicar la propiedad 7 del valor absoluto en los dos sentidos ($\leq$ y $\geq$) sin confundir cuándo se usa unión y cuándo intersección.
- Resolver inecuaciones con varios valores absolutos dividiendo la recta real en tramos según los puntos donde cada expresión interior cambia de signo.
- Recordar que multiplicar o dividir por un número negativo invierte el sentido de la desigualdad.
- Expresar cualquier solución como unión/intersección de intervalos, usando paréntesis con $\pm\infty$.
- Usar $|a|^2 = a^2$ para eliminar valores absolutos cuando conviene elevar al cuadrado.