

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas I. 17 de enero de 2025.

Apellidos: GARCIA RUIZ		Nombre: LUCIA	
DNI:	Titulación:	Grupo: (R-66. FRANCISCO ASTUDILLO)	

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 17 de enero de 2025.

- (1) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, -3x \leq y \leq 3x\}$$

y la función

$$f(x, y) = (2y - x)^3$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A , su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado y/o compacto.
 - (b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto A es convexo.
 - (c) **(5 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A .
 - (d) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de f , indicando la dirección de crecimiento de la función.
 - (e) **(20 puntos)** Utilizando las anteriores curvas de nivel de f , determine (si existen) los puntos donde la función f alcanza los valores **mínimo y/o máximo globales** en el conjunto A .
- (2) Considere la función $f(x, y, z) = -x^3 - 2xy - y^3 + 2yz - z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$.
- (a) **(15 puntos)** Determine el mayor conjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ donde la función f es estrictamente cóncava.
 - (b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto D encontrado en el apartado anterior es convexo.

- (3) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ty - xy + xz &= 3 \\ t^2x + z &= 2 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciable $y(x, t)$ y $z(x, t)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (0, 3, 2, 1)$.
 - (b) **(15 puntos)** Calcule $\frac{\partial y}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial y}{\partial t}(0, 1), \frac{\partial z}{\partial t}(0, 1)$
 - (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x, t)$ y $z(x, t)$ en el punto $(x_0, t_0) = (0, 1)$.
 - (d) **(5 puntos)** Utilice el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x, t)$ y $z(x, t)$ en el punto $(x_0, t_0) = (0, 1)$ para calcular un valor aproximado de $y(0.01, 0.99)$ y $z(0.01, 0.99)$.
- (4) Considere la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + 4xy + 2xz + 2yz + z^2$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) **(5 puntos)** Calcule la matriz simétrica A asociada a Q .
- (b) **(10 puntos)** Calcule los menores principales D_1, D_2 and D_3 de A .
- (c) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ and $b \neq 0$ la forma cuadrática Q es definida positiva?
- (d) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ and $b \neq 0$ la forma cuadrática Q es definida negativa?
- (e) **(15 puntos)** Clasifique la forma cuadrática Q para el valor $a = 0, b \in \mathbb{R}$.

- (5) **(20 puntos)** Considere la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $x(t, z), y(t, z) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = xy + y^2, \quad x(t, z) = t^2 + z, \quad y(t, z) = tz^2$$

Y considere la composición $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t, z) = f(x(t, z), y(t, z))$. Usando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial t}(-1, 1), \quad \frac{\partial h}{\partial z}(-1, 1)$$

- (6) Considere la función

$$f(x, y) = 5x^4 + 3x^2 + 4xy + y^6 + 5y^2$$

- (a) **(5 puntos)** Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función f en el punto (x, y) .
- (b) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función f en el punto $p = (0, 1)$.
- (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 of la función f en el punto $p = (0, 1)$.
- (d) **(10 puntos)** Demuestre que para cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica la siguiente desigualdad

$$5x^4 + 3x^2 + 4xy + y^6 + 5y^2 \leq 4x + 16y - 10$$

y que la desigualdad es estricta excepto para $x = 0, y = 1$.